Теорема Куратовского – Понтрягина:

**Теорема**:

Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных $K_5$ или $K_{3,3}$ .

**Доказательство:**

▷

Заметим, что из планарности графа следует планарность гомеоморфного графа и наоборот. В самом деле, пусть $G_1$ — плоский граф. Если добавить на нужных ребрах вершины степени $2$ и удалить некотрые вершины степени $2$ в $G_1$, получим укладку гомеоморфного графа $G_2$. Таким образом, доказательство необходимости следует из непланарности $K_5$ и $K_{3,3}$.

Докажем достаточность. От противного: пусть существует непланарный граф, который не содержит подграфов, гомеоморфных $K_5$ или $K_{3,3}$. Пусть $G$ — такой граф с наименьшим возможным числом рёбер, не содержащий изолированных вершин.

### G связен

Если $G$ не связен, то в силу минимальности $G$ его компоненты связности планарны и, следовательно, сам граф $G$ планарен.

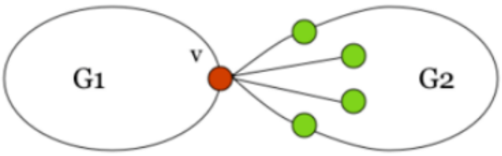
### G — обыкновенный граф

В самом деле, пусть в графе $G$ есть петля или кратное ребро $e$. Тогда в силу минимальности $G$ граф $G-e$ планарен. Добавляя ребро $e$ к графу $G-e$ получим, что граф $G$ планарен.

### G — блок

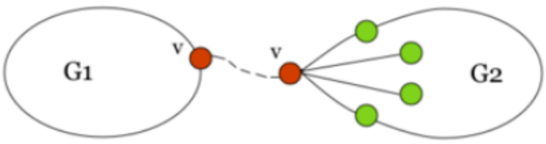
Пусть, от противного, в графе есть точка сочленения $v$. Через $G_1$ обозначим подграф графа $G$, порождённый вершинами одной из компонент связности графа $G-v$ и вершинной $v$, а через $G_2$ подграф графа $G$, порождённый вершинами остальных компонент связности графа $G-v$ и вершиной $v$.

В силу минимальности $G$, $G_1$ и $G_2$ — планарны.

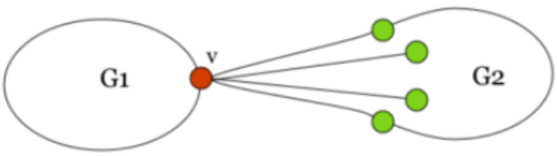



Возьмём укладку графа $G_1$ на плоскости такую, что вершина $v$ лежит на границе внешней грани. Ее можно получить, взяв любую укладку $G_1$ на плоскости, по ней построив укладку на шаре, используя обратную стереографическую проекцию[1], потом повернуть сферу так, чтоб $v$ оказалась на внешней грани стереографической проекции повернутого шара.

Затем во внешней грани графа $G_1$ возьмём укладку графа $G_2$ такую, что вершина $v$ будет представлена на плоскости в двух экземплярах.




Соединим два экземпляра вершины $v$ пучком жордановых линий, не допуская лишних пересечений с укладками графов $G_1$ и $G_2$, состоящим из такого количества линий, какова степень вершины $v$ в графе $G_2$. Далее отбросим вхождение вершины $v$ в граф $G_2$, заменяя инцидентные ей рёбра на жордановы линии, полученные из линий указанного пучка и рёбер.




Таким образом мы получили укладку графа $G$ на плоскости, что невозможно.

### В G нет мостов

Граф $G$ не равен $K_2$ и в нем нет точек сочленения, следовательно в $G$ нет мостов.

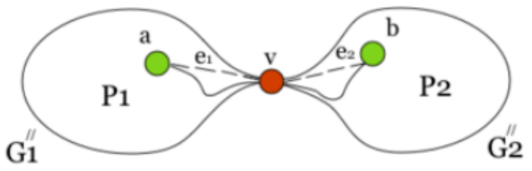
### В G' существует цикл, содержащий вершины a и b

Пусть $e = ab$ — произвольное ребро графа $G$, $G' = G - e$.

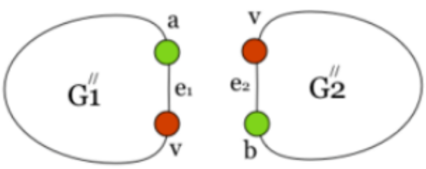
1. граф $G'$ планарен в силу минимальности графа $G$.
2. граф $G'$ связен в силу отсутствия в графе $G$ мостов.

Пусть $a$ и $b$ лежат в одном блоке $B$ графа $G'$.

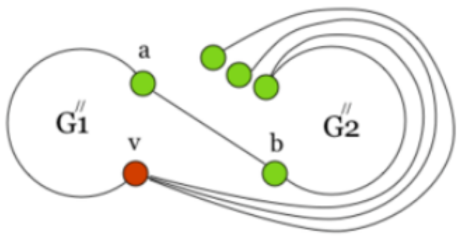
1. Если $|VB| \geqslant 3$, то существует цикл графа G', содержащий вершины $a$ и $b$.
2. Если $|VB| = 2$, то в $B$ имеется ребро $e' = ab$, но тогда в $G$ имеются кратные рёбра $e$ и $e'$, что невозможно.
3. Если вершины $a$ и $b$ лежат в разных блоках графа $G'$, что существует точка сочленения $v$, принадлежащая любой простой $(a, b)$ — цепи графа $G'$. Через $G'_1$ обозначим подграф графа $G'$, порождённый вершиной $v$ и вершинами компоненты связности графа $G' - v$, содержащей $a$, а через $G'_2$ — подграф графа $G'$, порождённый вершиной $v$ и вершинами остальных компонент связности графа $G' - v$ (в этом множестве лежит вершина $b$). Пусть $G''_1 = G'_1 + e_1$, где $e_1 = vb$ — новое ребро.




Заметим, что в графе $G''_1$ рёбер меньше, чем в графе $G$. Действительно, вместо ребра $e$ в $G''_1$ есть ребро $e_1$ и часть рёбер из графа $G$ осталась в графе $G''_2$. Аналогично, в графе $G''_2$ рёбер меньше, чем в графе $G$.
Теперь в силу минимальности графа $G$ графы $G''_1$ и $G''_2$ планарны. Возьмем укладку графа $G''_1$ на плоскости такую, что ребро $e_1 = av$ лежит на границе внешней грани(ее существование доказывается аналогично существованию такой укладки для вершины графа). Во внешней грани графа $G''_1$ возьмем укладку графа $G''_2$ такую, что ребро $e_2 = vb$ лежит па границе внешней грани.




Отметим, что опять вершина $v$ представлена на плоскости в двух экземплярах. Очевидно, добавление ребра $e = ab$ не меняет планарности графа $G''_1 U G''_2$. Склеим оба вхождения вершины $v$ точно так же, как это мы сделали в предыдущем пункте доказательства.




Сотрем затем ранее добавленные ребра $e_1$ и $e_2$. В результате мы получим укладку графа $G$ на плоскости, что невозможно. Утверждение доказано.

**Плана́рный граф** — граф, который можно изобразить на плоскости без пересечений рёбер не по вершинам. Какое-либо конкретное изображение планарного графа на плоскости называется **плоским графом**. Иначе говоря, планарный граф изоморфен некоторому плоскому графу, изображённому на плоскости так, что его вершины — это точки плоскости, а рёбра — кривые на плоскости, которые если и пересекаются между собой, то только по вершинам. Области, на которые граф разбивает плоскость, называются его **гранями**. Неограниченная часть плоскости — тоже грань, называемая **внешней гранью**. Любой плоский граф может быть спрямлён, то есть перерисован на плоскости так, что все его рёбра будут отрезками прямых.

**Гомеоморфи́зм** (греч. ὅμοιος — похожий, μορφή — форма) — взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение топологических пространств. Иными словами, это биекция, связывающая топологические структуры двух пространств, поскольку, при непрерывности биекции, образы и прообразы открытых подмножеств являются открытыми множествами, определяющими топологии соответствующих пространств.

Пространства, связанные гомеоморфизмом, топологически неразличимы. Можно сказать, что топология (в общем виде) изучает неизменные при гомеоморфизме свойства объектов.

В категории топологических пространств рассматриваются только непрерывные отображения, поэтому в этой категории изоморфизм является также и гомеоморфизмом.